c'est-à-dire

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh \pi} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

Exercice 14.2 On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\, dy = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(n\,x)\, dx = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(n\,y)\, dy = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \sin(n\,x)\, dx = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \sin(n\,y)\, dy = 0.$$

La série de Fourier est donc

$$Ff(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(n\,x)}{n^2}.$$

Le théorème de Dirichlet nous assure (noter que f est continue en $x=0$ et $x=2\pi$) alors que

$$Ff(x) = f(x) \quad \text{si } x \in [0, 2\pi]$$

et donc, quand on prend respectivement $x = 0$ ($f(0) = \pi^2$) et $x = \pi$ ($f(\pi) = 0$), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 14.3 On observe que f est une fonction impaire et donc $a_n = 0$. On trouve par contre, comme f est 2π périodique, que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n\,x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin(n\,x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(n\,x)\, dx = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ -\frac{2n}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

On a donc dès que $n \geq 2$ ($b_1 = 1/2$) que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1 \text{ (i.e. impair)} \\ \dfrac{-2n}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n = 4k \text{ (i.e. un multiple de 4)} \\ \dfrac{2n}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n = 4k+2 \text{ (i.e. pair mais pas un multiple de 4).} \end{cases}$$

Exercice 14.4 On a par définition

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\, e^{-i\pi n\, x}\, dx.$$

Si $n = 0$ on trouve $c_0 = 1$ alors que si $n \neq 0$ on obtient après intégration

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x\, e^{-i\pi n\, x}}{-i\pi n}\right]_0^2 + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^2 e^{-i\pi n\, x}\, dx = \frac{i}{\pi n}$$

et par conséquent

$$Ff(x) = 1 + \frac{i}{\pi}\sum_{n\neq 0} \frac{e^{i\pi n\, x}}{n}.$$

Remarque. Comme n peut être négatif on constate que le membre de droite de $Ff(x)$ est bien une fonction réelle.

Exercice 14.5 *(i)* Comme f est impaire on a

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{si } x \in (0,\pi) \\ x(\pi + x) & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

et donc $a_k = 0$ et

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(k\,x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(k\,x)\, dx.$$

On a alors que

$$\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(k\,x)\, dx = \left[-x(\pi-x)\frac{\cos(k\,x)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(k\,x)}{k}(\pi - 2\,x)\, dx$$

$$= \left[(\pi - 2\,x)\frac{\sin(k\,x)}{k^2}\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(k\,x)}{k^2}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{k^3}\cos(k\,x)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{k^3}(-1)^k + \frac{2}{k^3}.$$

On trouve donc

$$b_k = \frac{4}{\pi k^3}\left[1 - (-1)^k\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{8}{\pi k^3} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et on obtient alors

$$Ff(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\,x)}{(2k-1)^3}.$$

(ii) En utilisant l'idendité de Parseval on trouve

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi-x)^2\,dx=\frac{\pi^4}{15}$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

Exercice 14.6 Cet exercice peut, évidemment, être résolu de manière plus élémentaire. Comme $f(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$, ce qui implique que les coefficients de Fourier sont

$$a_0=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_n=0 \text{ si } n\neq 0,2 \quad\text{et}\quad b_n=0\ \forall n.$$

On a donc par 2π périodicité et par l'identité de Parseval que

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx=\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 14.7 *(i)* Tout d'abord on remarque que la fonction est paire, par conséquent $b_k=0$. On trouve que

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi.$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi}-\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx=\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right].\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$a_k=\begin{cases}0 & \text{si } k \text{ est pair}\\ \dfrac{-4}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$$

et donc finalement

$$Ff(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

(ii) En utilisant l'identité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

et on en déduit donc

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^2}{6}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

En utilisant le résultat précédent on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}+\frac{\pi^4}{96},$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 14.8 *(i)* On observe que la fonction donnée est paire, par conséquent $b_n=0$. On trouve que

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\cos x|\cos(nx)\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(nx)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\cos(nx)\,dx.\end{aligned}$$

Faisons un changement de variable et posons $y=x-\pi$ dans la deuxième intégrale (on rappelle que $\cos(z+n\pi)=(-1)^n\cos z$) on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\cos(nx)\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(y+\pi)\cos(n(y+\pi))\,dy\\&=(-1)^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(ny)\,dy.\end{aligned}$$

Par conséquent en revenant à a_n on a

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(ny)\,dy$$

et on déduit immédiatement que si n est impair alors $a_n=0$. Par conséquent en posant $n=2k$ et en utilisant le fait que

$$2\cos y\cos(2ky)=\cos((2k+1)y)+\cos((2k-1)y)$$

on obtient

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((2k+1)y)}{2k+1}+\frac{\sin((2k-1)y)}{2k-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}.$$

On a ainsi la série de Fourier

$$Ff(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos(2k\,x)$$

(ii) En prenant $x = \pi/2$, on a $\cos(2k\,x) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et $f(\pi/2) = 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 14.9 Comme f est 2π périodique et paire on a que $b_n = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\,t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3\,t)\cos(n\,t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin((3-n)\,t) + \sin((3+n)\,t)\right]dt. \end{aligned}$$

Si $n \neq 3$ (si $n = 3$ on a immédiatement $a_3 = 0$) on obtient alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((3-n)\,t)}{3-n} - \frac{\cos((3+n)\,t)}{3+n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{3-n}}{3-n} - \frac{(-1)^{3+n}}{3+n} + \frac{1}{3-n} + \frac{1}{3+n}\right] \end{aligned}$$

et donc

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{2}{3-n} + \dfrac{2}{3+n}\right] = \dfrac{12}{\pi(9-n^2)} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier est alors donnée par

$$Ff(t) = \frac{2}{3\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k\,t)}{9-4\,k^2}.$$

Exercice 14.10 *(i)* Tout d'abord on remarque que la fonction est paire, par conséquent $b_k = 0$. On trouve que

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha\,x)\cos(k\,x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha\,x)\cos(k\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos((\alpha+k)\,x) + \cos((\alpha-k)\,x)\right]dx \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+k)\,\pi)}{\alpha+k} + \frac{\sin((\alpha-k)\,\pi)}{\alpha-k}\right] \\ &= \frac{(-1)^k\sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k}\right] = \frac{(-1)^k\sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\,\frac{2\,\alpha}{\alpha^2-k^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall\, x \in [-\pi, \pi)$,

$$Ff(x) = \frac{\sin(\alpha\,\pi)}{\alpha\,\pi} + \frac{2\,\alpha\sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\alpha^2}\cos(k\,x).$$

(ii) Comme f est continue, on obtient en prenant $x = \pi$

$$\cos(\alpha\,\pi) = \frac{2\,\alpha\sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2\,\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-1)^k}{k^2-\alpha^2}\right],$$

d'où, pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\,\alpha^2} - \frac{\pi}{2\,\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha\,\pi)}.$$

Exercice 14.11 *(i)* En utilisant la notation complexe on trouve

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,n\,x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,e^{-i\,n\,x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}dx\right). \end{aligned}$$

On effectue les changements de variable respectifs, $u = x + \pi$ et $v = x - \pi$, et on obtient

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -u\,e^{i\,n\,\pi}e^{-i\,n\,u}\,du = (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,e^{-i\,n\,u}\,du$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -v\,e^{-i\,n\,\pi}e^{-i\,n\,v}\,dv = (-1)^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} v\,e^{-i\,n\,v}\,dv$$

et ainsi

$$c_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2\pi}\left[\left(\frac{i\,x}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-i\,n\,x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

On trouve immédiatement que si n est pair $c_n = 0$, alors que si n est impair ($n = 2k-1$, alors $e^{-i(2k-1)\pi/2} = -e^{i(2k-1)\pi/2} = (-1)^k\,i$) on obtient

$$c_{2k-1} = \frac{(-1)^k\,2i}{\pi\,(2k-1)^2}.$$

Comme f est continue on a pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}.$$

(ii) Si on prend $x \in [-a, a]$, on a que $(\pi/2a)\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$, et par conséquent

$$x = \frac{4ia}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} e^{\frac{i\pi(2k-1)x}{2a}}.$$

(iii) En particulier, pour $x = a$, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 14.12 *(i)* On trouve après calcul que $b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n}$ $a_n = 0$

$$F_3 f(x) = \pi + 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x)$$

et par conséquent

$$\begin{array}{lll}
F_3 f(-\pi) = \pi & f(-\pi) = 0 & \Rightarrow\ f(-\pi) - F_3 f(-\pi) = -\pi \\
F_3 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{4}{3} & f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F_3 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \\
F_3 f(0) = \pi & f(0) = \pi & \Rightarrow\ f(0) - F_3 f(0) = 0 \\
F_3 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \frac{4}{3} & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} & \Rightarrow\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_3 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \\
F_3 f(\pi) = \pi & f(\pi) = 0 & \Rightarrow\ f(\pi) - F_3 f(\pi) = -\pi.
\end{array}$$

Remarque. On a $f(\pi) = f(-\pi)$ par 2π périodicité et donc $f(\pi) = 0$ mais $f(\pi - 0) = 2\pi$ alors que $f(-\pi + 0) = f(-\pi) = 0$.

(ii) Par 2π périodicité et par l'exercice 14.13, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(x) - F_3 f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n^2 + b_n^2)\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)^2 dx - \pi \left[\frac{(2\pi)^2}{2} + 4 + 1 + \frac{4}{9}\right] \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 - \frac{49}{9}\pi \approx 3.567.
\end{aligned}$$

Exercice 14.13 * *(i)* Appelons

$$I_{N,k} = \int_0^{2\pi} F_N f(x) \cos(kx)\, dx \quad \text{et} \quad J_{N,k} = \int_0^{2\pi} F_N f(x) \sin(kx)\, dx$$

et calculons

$$\begin{aligned}
I_{N,k} &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(kx)\, dx \right\}
\end{aligned}$$

(et idem pour $J_{N,k}$) ce qui donne, $\forall\, k = 0, 1, \cdots, N$,

$$I_{N,k} = \pi\, a_k \quad \text{et} \quad J_{N,k} = \pi\, b_k\,.$$

En utilisant à nouveau la définition de $F_N f$ et le résultat précédent on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (F_N f(x))^2 dx &= \frac{a_0}{2} I_{N,0} + \sum_{k=1}^{N} (a_k I_{N,k} + b_k J_{N,k}) \\
&= \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2) \right\}.
\end{aligned}$$

On obtient de manière semblable

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx + b_n \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition des a_n et b_n on déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2).$$

En combinant tous ces résultats on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N f(x)|^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx + \int_0^{2\pi} (F_N f(x))^2 dx
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right].$$